Revista de Educación Matemática
Volumen 34, N° 2 (2019), páginas 41 – 66
Unión Matemática Argentina - Famaf (UNC)

PROBABILIDADES EN EL JUEGO DEL TRUCO

Emiliano Gómez

Resumen. Utilizando ideas básicas de probabilidad, combinatoria y conjuntos, calculamos varias probabilidades relacionadas al popular juego del truco.

Abstract. Using basic ideas from probability, combinatorics and sets, we compute several probabilities related to the popular card game called "truco" .

§1. Introducción

El truco es un juego de naipes muy popular en Sudamérica, con distintas variantes en distintos países o regiones. Se usa la baraja española. El mazo contiene 40 cartas, repartidas en cuatro palos que son oros, copas, espadas y bastos. Las diez cartas de cada palo son el as (1), 2, 3, 4, 5, 6, 7, sota (10), caballo (11) y rey (12). Las tres últimas se llaman figuras.

La mano de cada jugador consiste en tres de las 40 cartas. En este ensayo explicamos cómo calcular varias probabilidades asociadas a la mano de un jugador. Algunos ejemplos son:

- la probabilidad de tener el as de espadas;
- la probabilidad de tener al menos una carta mejor que un 2 para el truco;
- la probabilidad de tener flor;
- la probabilidad de tener al menos dos cartas del mismo palo;
- la probabilidad de tener 33 para el envido;
- la probabilidad de tener 27 o más para el envido.

También vamos a calcular algunas probabilidades asociadas a una "ronda", es decir las dos, cuatro o seis manos juntas si se juega entre dos, cuatro o seis jugadores. Por ejemplo, vamos a obtener la probabilidad de que algún jugador tenga el as de espadas, o de que en la ronda haya al menos una carta que valga más que un 3 para el truco.

Palabras clave: Probabilidad. Combinatoria. Conjuntos. Juego del truco.
Keywords: Probability. Combinatorics. Sets. Truco (card game).

Si al lector no le interesa cómo se obtienen estas probabilidades, o si en algún momento la lectura se le hace pesada, siempre puede dirigirse directamente al final, donde incluimos algunas tablas con probabilidades de interés para el juego.

Como es sabido, en el truco se miente, se trata de engañar al otro jugador o al otro equipo. El conocimiento de estas probabilidades puede llegar a ser útil para tomar algunas decisiones durante el juego, pero no puede, por sí solo, convertir a nadie en un buen jugador. Se necesita práctica y, a través de ella, el desarrollo de una intuición para el juego y de distintas tácticas o estrategias según cada situación o adversario(s).

Damos por supuesto que el lector sabe jugar al truco, o al menos tiene una idea general del juego. De todos modos, como hay distintas variantes, un apéndice al final contiene un breve repaso de la jerarquía de las cartas para el truco y del puntaje para el envido en la versión que, creemos, es la más común en la Argentina, y que usamos en este ensayo para calcular probabilidades.

Suponemos también que el lector tiene un conocimiento básico de probabilidad y combinatoria, incluyendo los números combinatorios

$$C(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

(recordemos que $n! = 1\times 2\times\cdots\times n$). Por ejemplo, si tenemos 7 jugadores y queremos formar un equipo de baloncesto con 5 de ellos, el número de equipos diferentes que podemos formar es $C(7,5) = \frac{7!}{2!\,5!} = \frac{7\times 6}{2} = 21$. Los libros (Anderson, 2001) y (Isaac, 1995) citados al final son muy accesibles y se pueden usar como una buena introducción a varios temas de combinatoria y probabilidad.

§2. Probabilidades para la mano de un jugador

Empecemos por calcular el número de manos posibles. Como el mazo tiene 40 cartas y la mano de un jugador consiste en tres de ellas, hay un total de

$$C(40,3) = \frac{40\times 39\times 38}{2\times 3} = 20\times 13\times 38 = 9.880$$

manos distintas. Este número juega un papel central, ya que la probabilidad de tener una mano con cierta propiedad es el número de manos que poseen esa propiedad dividido por el número total de manos distintas. Por supuesto, este cálculo se basa en la suposición de que cada una de las 9.880 manos posibles tiene la misma probabilidad (algo que no sería cierto, por ejemplo, si el repartidor hace trampa, o si alguien esconde una carta sacándola del mazo).

Probabilidad de tener una carta específica. Si a es una carta específica, ¿cuál es la probabilidad de tenerla en la mano? Por ejemplo, ¿cuál es la probabilidad de tener el as de espadas? Hay dos maneras diferentes de calcular esta probabilidad. Por un lado, la probabilidad de que la carta a se encuentre en un conjunto de k cartas del mazo ($0 \le k \le 40$) es claramente $\frac{k}{40}$. Por ejemplo, si agarramos 20 cartas al azar, la probabilidad de que el as de espadas sea una de esas 20 cartas es $\frac{20}{40} = \frac{1}{2}$. Como la mano de un jugador es un conjunto de tres cartas, la probabilidad de tener la carta a es $\frac{3}{40} = 0{,}075$.

Pero también podemos razonar que el número de manos que contienen la carta a es $C(39,2) = \frac{39\times 38}{2} = 39 \times 19 = 741$, porque para formar una mano que contenga la carta a, tenemos que elegir dos cartas más, de entre las 39 cartas que quedan. Por lo tanto, la probabilidad de tener la carta a es

$$\frac{C(39,2)}{C(40,3)} = \frac{741}{9.880} = 0{,}075.$$

Probabilidad de tener dos cartas específicas. ¿Cuál es la probabilidad de tener, en una mano, dos cartas específicas a y b? Por ejemplo, ¿cuál es la probabilidad de tener el as de espadas y el as de bastos? Una vez más, se puede razonar de dos maneras. Por un lado, podemos pensar que la probabilidad de tener a y también b es la probabilidad de tener a, multiplicada por la probabilidad de que una de las otras dos cartas sea b. Esto nos da

$$\frac{3}{40} \times \frac{2}{39} = \frac{1}{20 \times 13} = \frac{1}{260} \approx 0{,}003846.$$

Por otro lado, también podemos pensar que hay $C(38,1) = 38$ manos que contienen las dos cartas a y b, ya que para formar una mano con ellas, tenemos que elegir una carta más, de las 38 que quedan. Por lo tanto, la probabilidad de tener las dos cartas a y b es

$$\frac{C(38,1)}{C(40,3)} = \frac{38}{9.880} = \frac{1}{260} \approx 0{,}003846.$$

Probabilidad de tener tres cartas específicas. La probabilidad de tener tres cartas específicas a, b y c (por ejemplo, la probabilidad de tener el as, el siete y el seis de espadas) es claramente $\frac{1}{9.880} \approx 0{,}0001$. Siguiendo con los razonamientos anteriores, podemos obtener esta probabilidad ya sea como $\frac{3}{40} \times \frac{2}{39} \times \frac{1}{38}$ o como $\frac{1}{C(40,3)}$, ya que obviamente hay una sola mano que contiene las tres cartas.

Probabilidad de tener (al menos) una de dos cartas específicas. Hemos visto que la probabilidad de tener el as de espadas y el as de bastos es $\frac{1}{260}$. Pero también nos interesa la probabilidad de tener el as de espadas o el as de bastos. Siempre usamos el "o" de modo inclusivo. En este ejemplo, nos referimos a la probabilidad de tener el as de espadas, o el as de bastos, o ambas cartas. Es decir, la probabilidad de tener al menos una de ellas. Si a y b son dos cartas específicas, ¿cuál es la probabilidad de tener al menos una de ellas en la mano?

Aquí las cosas se empiezan a complicar un poco, porque debemos tener cuidado al contar el número de manos que contienen al menos una de las dos cartas. El número de manos que contienen la carta a es $C(39,2) = 741$. Del mismo modo, el número de manos que contienen la carta b es 741. Si sumamos los dos números, $741 + 741$, ¿obtenemos el número de manos que contienen la carta a o la carta b? No, porque hemos contado dos veces cada una de las manos que contienen ambas cartas. Por lo tanto, debemos restar el número de manos que contienen ambas cartas. Este número es $C(38, 1) = 38$. El resultado es que el número de manos que contienen al menos una de las dos cartas es $741 + 741 - 38 = 1.444$. Ahora podemos calcular la probabilidad de tener la carta a o la carta b, es decir la probabilidad de tener al menos una de ellas en la mano es

$$\frac{1.444}{9.880} \approx 0{,}14615.$$

Desde luego, esta probabilidad es mucho mayor que la probabilidad de tener ambas cartas ($\frac{1}{260} \approx 0{,}003846$).

Conjuntos. Nos interesa generalizar el razonamiento anterior para calcular la probabilidad de que dadas k cartas del mazo, nos toque una mano que contenga al menos una de ellas (acabamos de hacerlo para $k = 2$). Esto nos permitirá encontrar, por ejemplo, la probabilidad de tener (al menos) un tres en la mano ($k = 4$), o la probabilidad de tener (al menos) una carta que valga más que un dos para el truco ($k = 8$).

En realidad, estamos trabajando con conjuntos, y es muy conveniente usar la terminología correspondiente para calcular probabilidades. Repasemos algunas de las cosas que ya vimos, en términos de conjuntos.

Llamemos S al conjunto de todas las cartas del mazo:

$$S = \{\text{as de oros, 2 de oros, } \ldots, \text{ rey de oros, as de copas, } \ldots, \text{ rey de bastos}\}.$$

Si un conjunto A tiene (exactamente) n elementos, escribimos $|A| = n$. Por ejemplo, $|S| = 40$. Escribimos $a \in A$ cuando a es un elemento de A y $a \notin A$ cuando no lo es. Se dice que A es un subconjunto de B, y escribimos $A \subseteq B$, si cada elemento de A es también un elemento de B. Por ejemplo, si $O = \{$as de oros, 2 de oros, $\ldots$, rey de oros$\}$ es el conjunto de todos los oros del mazo, tenemos que $O \subseteq S$. Otro modo de definir el conjunto O es así: $O = \{s \in S : s \text{ es de oros}\}$.

Llamemos M al conjunto de todas las manos posibles:

$$M = \{T : T \subseteq S \text{ y } |T| = 3\}.$$

Es decir, un elemento de M (una mano) es un subconjunto T del mazo que contiene (exactamente) tres cartas. Como vimos al principio,

$$|M| = C(40, 3) = 9.880.$$

La unión de dos conjuntos A y B es $A \cup B = \{s : s \in A \text{ o } s \in B\}$. Recordemos que el "o" es inclusivo: consiste en todos los elementos que pertenecen a A, o a B, o a ambos conjuntos. La intersección de A y B es $A \cap B = \{s : s \in A \text{ y } s \in B\}$. Es decir, consiste en todos los elementos que pertenecen a ambos conjuntos, A y B.

El conjunto A de todas las manos que contienen una carta específica a es

$$A = \{T \in M : a \in T\}.$$

Como vimos, $|A| = C(39, 2) = 741$. Si $B = \{T \in M : b \in T\}$ es el conjunto de todas las manos que contienen la carta b, entonces $A \cap B$ es el conjunto de todas las manos que contienen ambas cartas a y b, mientras que $A \cup B$ es el conjunto de todas las manos que contienen una carta o la otra, es decir, que contienen al menos una de las dos cartas. Como vimos,

$$|A \cap B| = C(38, 1) = 38 \qquad \text{y} \qquad |A \cup B| = 741 + 741 - 38 = 1.444.$$

La unión e intersección de los conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ se definen así:

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \{s : s \in A_1 \text{ o } s \in A_2 \text{ o } \cdots \text{ o } s \in A_n\}$$

$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i = \{s : s \in A_1 \text{ y } s \in A_2 \text{ y } \cdots \text{ y } s \in A_n\}$$

Es decir, la unión es el conjunto de elementos que pertenecen a por lo menos uno de $A_1, A_2, \ldots, A_n$, y la intersección es el conjunto de elementos que pertenecen a todos estos conjuntos.

Si A y B son los conjuntos que definimos arriba y $C = \{T \in M : c \in T\}$ es el conjunto de todas las manos que contienen la carta c, entonces $A \cap B \cap C$ es el conjunto de todas las manos que contienen las tres cartas a, b y c. Por supuesto, hay una sola mano, $T_{abc} = \{a, b, c\}$, que contiene las tres cartas. Así que $A \cap B \cap C = \{T_{abc}\}$ y $|A \cap B \cap C| = 1$. En cambio, $A \cup B \cup C$ es el conjunto de todas las manos que contienen al menos una de las tres cartas. ¿Cuántos elementos tiene este conjunto? Para responder esta pregunta, debemos generalizar el método que empleamos para calcular $|A \cup B|$.

Principio de inclusión-exclusión. Veamos, en términos de conjuntos, cómo contamos el número de todas las manos que contienen la carta a o la carta b. Si A es el conjunto de todas las manos que contienen la carta a y B es el conjunto de todas las manos que contienen la carta b, la cuenta que hicimos es

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

(nos dió $741 + 741 - 38 = 1.444$), para no contar dos veces las manos que contienen ambas cartas, que son el conjunto $A \cap B$. Este modo de contar el número de elementos en una unión se generaliza a más de dos conjuntos. El resultado es el principio de inclusión-exclusión, llamado así por el modo en que vamos sumando y restando elementos de distintos subconjuntos de la unión.

Veamos por ejemplo cómo calcular $|A \cup B \cup C|$. Si sumamos $|A| + |B| + |C|$, hemos contado dos veces a los elementos que están en A y B pero no en C, a los elementos que están en A y C pero no en B, y a los elementos que están en B y C pero no en A. También contamos tres veces a los elementos que están en A, B y C (es decir, a los elementos de $A \cap B \cap C$). Tratemos de corregir el doble conteo restando los elementos de las intersecciones de dos conjuntos: $|A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C|$. Al hacer esto, restamos tres veces a los elementos de $A \cap B \cap C$. Estos elementos habían sido contados tres veces, por lo que el resultado neto hasta el momento es que no los hemos contado. Por lo tanto, sólo falta volverlos a sumar, para finalmente obtener

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Podemos obtener la misma fórmula si pensamos en $A \cup B \cup C$ como $(A \cup B) \cup C$ y usamos el resultado anterior con los dos conjuntos $A \cup B$ y C. Este razonamiento se puede extender por inducción para obtener el principio de inclusión-exclusión. La fórmula general es algo complicada, por lo que no la vamos a escribir aquí (referimos al lector interesado al capítulo 6 de (Anderson, 2001)). Pero lo que nos dice es bastante sencillo: para calcular el número de elementos de la unión de n conjuntos, hay que

- sumar el número de elementos de cada conjunto,
- restar el número de elementos de cada intersección de dos conjuntos a la vez,
- sumar el número de elementos de cada intersección de tres conjuntos a la vez,
- restar el número de elementos de cada intersección de cuatro conjuntos a la vez,
- y continuar así hasta sumar (si n es impar) o restar (si n es par) el número de elementos de la intersección de los n conjuntos.

Por ejemplo, si $n = 4$, obtenemos

$$\begin{aligned} |A \cup B \cup C \cup D| = \;& |A| + |B| + |C| + |D| \\ & - |A \cap B| - |A \cap C| - |A \cap D| - |B \cap C| - |B \cap D| - |C \cap D| \\ & + |A \cap B \cap C| + |A \cap B \cap D| + |A \cap C \cap D| + |B \cap C \cap D| \\ & - |A \cap B \cap C \cap D| \end{aligned} \tag{2.1}$$

Probabilidad de tener (al menos) una de tres cartas específicas. Ahora podemos volver al truco y a las probabilidades. ¿Cuál es la probabilidad de tener en la mano (al menos) una de tres cartas específicas a, b y c? Por ejemplo, ¿cuál es la probabilidad de tener la sota, el caballo o el rey de oros?

Si A es el conjunto de todas las manos que contienen la carta a, B es el conjunto de todas las manos que contienen la carta b, y C es el conjunto de todas las manos que contienen la carta c, entonces el número de manos que contienen al menos una de las tres cartas es

$$\begin{aligned} |A \cup B \cup C| &= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| \\ &= 3 \times 741 - 3 \times 38 + 1 = 2.110. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la probabilidad de tener (al menos) una de las tres cartas es

$$\frac{|A \cup B \cup C|}{|M|} = \frac{2.110}{9.880} \approx 0{,}21356.$$

Probabilidad de tener (al menos) una de cuatro cartas específicas. ¿Cuál es la probabilidad de tener (al menos) un tres en la mano? Si A es el conjunto de todas las manos que contienen la carta a, B es el conjunto de todas las manos que contienen la carta b, C es el conjunto de todas las manos que contienen la carta c, y D es el conjunto de todas las manos que contienen la carta d, entonces el número de manos que contienen al menos una de las cuatro cartas es $|A \cup B \cup C \cup D|$, y lo podemos calcular usando la ecuación (2.1) de arriba.

Aquí surge una nueva "complicación", ya que debemos tener en cuenta que una mano tiene sólo tres cartas y por lo tanto, no es posible tener en la mano las cuatro cartas a, b, c y d. Esto significa que $|A \cap B \cap C \cap D| = 0$. Pusimos "complicación" entre comillas porque en realidad, esto nos facilita las cuentas. Nos queda

$$|A \cup B \cup C \cup D| = 4 \times 741 - 6 \times 38 + 4 \times 1 = 2.740.$$

Por lo tanto, la probabilidad de tener una (o dos o tres) de las cuatro cartas en nuestra mano es

$$\frac{|A \cup B \cup C \cup D|}{|M|} = \frac{2.740}{9.880} \approx 0{,}27733.$$

Probabilidad de tener (al menos) una de k cartas específicas. Si nos fijamos en la cuenta que hicimos, $|A \cup B \cup C \cup D| = 4 \times 741 - 6 \times 38 + 4 \times 1 = 2740$, es evidente que los "coeficientes" 4, 6 y 4 se deben a que hay 4 maneras de elegir uno de los cuatro conjuntos A, B, C y D, hay 6 maneras de elegir dos de ellos, y hay 4 maneras de elegir tres de ellos. Es decir, la cuenta es

$$|A \cup B \cup C \cup D| = C(4,1) \times 741 - C(4,2) \times 38 + C(4,3) \times 1.$$

El mismo razonamiento sirve para calcular la probabilidad de tener en la mano (al menos) una de las k cartas $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Si para cada $1 \leq i \leq k$ definimos $A_i = \{T \in M : a_i \in T\}$ (el conjunto de todas las manos que contienen la carta a_i), entonces el conjunto de todas las manos que contienen (al menos) una de las k cartas es $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k = \bigcup_{i=1}^{k} A_i$.

Recordemos nuevamente que no podemos tener más de tres cartas en la mano, por lo que todas las intersecciones de cuatro o más de los conjuntos A_i son nulas. Combinando esto con el principio de inclusión-exclusión, resulta que $|\bigcup_{i=1}^{k} A_i| = C(k,1) \times 741 - C(k,2) \times 38 + C(k,3) \times 1$. Hay $C(k,1) = k$ maneras de elegir uno de los k conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_k$, y cada uno de ellos tiene 741 elementos. Hay $C(k,2)$ maneras de elegir dos de los k conjuntos, y cada una de las intersecciones de dos conjuntos tiene 38 elementos. Hay $C(k,3)$ maneras de elegir tres de los k conjuntos, y cada una de las intersecciones de tres conjuntos tiene un único elemento. La probabilidad de tener (al menos) una de las k cartas $a_1, a_2, \ldots, a_k$ es, por lo tanto,

$$\frac{|\bigcup_{i=1}^{k} A_i|}{|M|} = \frac{C(k,1) \times 741 - C(k,2) \times 38 + C(k,3) \times 1}{9.880}. \tag{2.2}$$

Repasemos los valores de k para los que ya hicimos la cuenta: k = 2, 3 y 4. Cuando $k = 2$, la ecuación (2.2) nos da

$$\frac{2 \times 741 - 1 \times 38 + 0 \times 1}{9.880} = \frac{1.444}{9.880} \approx 0{,}14615,$$

ya que $C(2,1) = 2$, $C(2,2) = 1$ y $C(2,3) = 0$. Cuando $k = 3$, obtenemos

$$\frac{3 \times 741 - 3 \times 38 + 1 \times 1}{9.880} = \frac{2.110}{9.880} \approx 0{,}21356,$$

ya que $C(3,1) = 3$, $C(3,2) = 3$ y $C(3,3) = 1$. Y cuando $k = 4$, obtenemos

$$\frac{4 \times 741 - 6 \times 38 + 4 \times 1}{9.880} = \frac{2.740}{9.880} \approx 0{,}27733,$$

ya que $C(4,1) = 4$, $C(4,2) = 6$ y $C(4,3) = 4$.

Calculemos ahora la probabilidad de tener (al menos) una de k cartas específicas cuando $k = 8$ y $k = 12$, casos de interés en el juego del truco. Cuando $k = 8$, obtenemos la probabilidad de tener (al menos) una carta que valga más que un dos para el truco. Cuando $k = 12$, obtenemos la probabilidad de tener alguna carta que valga más que el as de oros (o de copas), o también la probabilidad de tener alguna figura (sota, caballo o rey). Invitamos al lector a comprobar que si $k = 8$, la ecuación (2.2) nos da

$$\frac{4.920}{9.880} \approx 0{,}49798,$$

y si $k = 12$, nos da

$$\frac{6.604}{9.880} \approx 0{,}66842.$$

Es decir que a la larga, más o menos la mitad de las manos que nos tocan deberían tener al menos una carta mejor que un dos para el truco, y más o menos dos tercios de las manos deberían incluir alguna figura.

Si nos fijamos en la probabilidad de tener (al menos) una de k cartas específicas para los valores de k que hemos compilado (k = 2, 3, 4, 8 y 12), podemos confirmar algo que es obvio sin hacer ninguna cuenta: la probabilidad aumenta con k

y tiende a 1. Cuando $k = 37$, la probabilidad es $\frac{9.879}{9.880} \approx 0{,}9999$, ya que todas las manos menos una contienen (al menos) una de las 37 cartas. La única excepción es la mano que contiene las tres cartas que quedan. Cuando k = 38, 39 o 40, la probabilidad es 1, ya que todas las manos contienen al menos una de las k cartas. El lector puede comprobar por su cuenta que la ecuación (2.2) nos da la probabilidad correcta para k = 37, 38, 39 y 40.

Complementos. La ecuación (2.2) no es la única manera de calcular la probabilidad de tener (al menos) una de k cartas específicas. Si usamos la idea del complemento de un conjunto, podemos obtener una fórmula más sencilla. Llamemos A al conjunto de todas las manos que poseen una cierta propiedad y B al conjunto de todas las manos que no poseen esta propiedad. Entonces $A \cap B = \varnothing$ (el conjunto vacío) y $A \cup B = M$ (el conjunto de todas las manos posibles). En un caso así, decimos que A es el complemento de B en M (y que B es el complemento de A en M). Por lo tanto, $|A| + |B| = |M| = 9.880$. Como la probabilidad de que una mano tenga la propiedad en cuestión es $\frac{|A|}{|M|}$, está claro que la probabilidad de que una mano no tenga esta propiedad es

$$\frac{|B|}{|M|} = 1 - \frac{|A|}{|M|}.$$

Si A es el conjunto de todas las manos que tienen (al menos) una de k cartas específicas, entonces su complemento es el conjunto B de todas las manos que no contienen ninguna de estas k cartas. Tenemos que $|B| = C(40 - k, 3)$, ya que para formar una mano de B, debemos elegir tres cartas de las $40-k$ que hay disponibles. Por lo tanto, la probabilidad de no tener ninguna de las k cartas es $\frac{C(40-k,3)}{9.880}$, y la probabilidad de tener (al menos) una de ellas es

$$1 - \frac{C(40 - k, 3)}{9.880}. \tag{2.3}$$

El lector puede verificar que esta fórmula coincide con la ecuación (2.2) para todos los valores de k que hemos calculado.

Las probabilidades que hemos calculado hasta ahora son más que nada útiles para el truco. Calculemos algunas probabilidades útiles para el envido. Antes de calcular la probabilidad de tener cantidades específicas, hagamos algunas cuentas relacionadas a la probabilidad de tener en la mano cartas del mismo palo o de distintos palos.

Probabilidad de tener tres cartas de distintos palos. ¿Cuál es la probabilidad de tener una mano cuyas tres cartas son de tres palos diferentes? Dicho de otro modo, ¿cuál es la probabilidad de tener 7 o menos para el envido? Hay dos maneras de pensarlo. Por un lado, sin importarnos la primera carta, queremos que la segunda no sea del mismo palo, y que la tercera no sea del mismo palo que ninguna de las dos primeras. Esto nos da

$$\frac{40}{40} \times \frac{30}{39} \times \frac{20}{38} = \frac{10}{13} \times \frac{10}{19} = \frac{100}{247} \approx 0{,}40486.$$

Por otro lado, podemos también contar el número total de manos que contienen cartas de tres palos distintos. Hay $C(4,3) = 4$ posibilidades para los tres palos, ya que hay cuatro palos y hay que elegir tres de ellos. Cada una de estas posibilidades cuenta con $10 \times 10 \times 10 = 1000$ manos diferentes, ya que hay diez cartas de cada palo. Por último, cada conjunto de 1000 manos obtenidas de esta manera es disjunto de los demás (es decir que tienen intersección vacía o nula. No tienen ningún elemento en común). Por ejemplo, ninguna mano que tenga una carta de oros, una de copas y una de espadas puede ser igual a una mano que tenga una carta de oros, una de copas y una de bastos. Por lo tanto, el número total de manos que contienen cartas de tres palos distintos es 4000, y la probabilidad de tener una mano así es

$$\frac{4.000}{9.880} = \frac{100}{247} \approx 0{,}40486.$$

Probabilidad de tener (al menos) dos cartas del mismo palo. Si A es el conjunto de todas las manos con cartas de tres palos distintos, entonces su complemento es el conjunto B de todas las manos que tienen al menos dos cartas del mismo palo. Recién calculamos que $|A| = 4.000$, así que $|B| = |M| - |A| = 9.880 - 4.000 = 5880$. La probabilidad de tener (al menos) dos cartas del mismo palo, es decir de tener 20 o más para el envido, es

$$1 - \frac{100}{247} = \frac{147}{247} \approx 0{,}59514$$

o, si se prefiere, $\frac{5.880}{9.880} = \frac{147}{247} \approx 0{,}59514$.

Probabilidad de tener tres cartas del mismo palo (flor). La flor no nos interesa mucho (ver el apéndice al final). Pero al menos calculemos la probabilidad de que nos toque una. Nuevamente, podemos pensarlo de dos maneras. Por un lado, sin importarnos la primera carta, queremos que la segunda sea del mismo palo, y que la tercera lo sea también. Esto nos da

$$\frac{40}{40} \times \frac{9}{39} \times \frac{8}{38} = \frac{12}{247} \approx 0{,}04858.$$

Por otra parte, podemos también contar el número de manos que contienen tres cartas del mismo palo. Hay cuatro palos, y para cada uno de ellos, debemos elegir tres de las diez cartas. Esto nos da $4 \times C(10,3) = 4 \times 120 = 480$ manos (cada conjunto de 120 manos es disjunto de los demás), y la probabilidad de tener flor es

$$\frac{480}{9.880} = \frac{12}{247} \approx 0{,}04858.$$

A la larga, nos debería tocar flor menos de $\frac{1}{20}$ de las manos.

Probabilidad de tener (al menos) una carta de un palo específico. ¿Cuál es la probabilidad de tener (al menos) un oro en la mano? Hay diez cartas de cada palo, así que la probabilidad de tener al menos una de las diez cartas de un cierto palo es, según (2.2) con $k = 10$,

$$\frac{5.820}{9.880} \approx 0{,}58907.$$

Probabilidad de tener ciertas cantidades para el envido. Las cuentas que hicimos de la probabilidad de tener una mano con tres palos distintos, y la de tener al menos dos cartas del mismo palo, nos dan la probabilidad de tener 7 o menos, y la de tener 20 o más para el envido (respectivamente). Ahora calculemos la probabilidad de tener (exactamente) ciertas cantidades específicas. Al final las compilamos en una tabla que nos dice no sólo la probabilidad para cada cantidad, sino también la probabilidad de tener una cierta cantidad o más. Esto último se puede hacer con una simple suma, ya que obviamente ninguna mano que valga m para el envido puede ser igual a una mano que valga $n \neq m$.

Aclaremos (ver el apéndice al final) que si un jugador tiene tres cartas del mismo palo (flor), entonces *para el envido se usan las dos mejores*. Por ejemplo, la mano {rey de oros, 2 de oros, 7 de oros} vale 29 de envido, y la mano {2 de copas, 3 de copas, 5 de copas} vale 28 de envido.

Probabilidad de tener 33 de envido. Ya vimos que la probabilidad de tener dos cartas específicas es $\frac{1}{260}$. La única manera de tener 33 de envido es tener el 7 y el 6 de un mismo palo. Como hay cuatro palos, y ninguna mano que tenga el 7 y el 6 de un palo puede ser igual a otra que tenga el 7 y el 6 de otro palo, está claro que la probabilidad es

$$4 \times \frac{1}{260} = \frac{1}{65} \approx 0{,}01538.$$

Otro modo de pensarlo es que para cada palo, hay $C(38, 1) = 38$ manos que contienen el 7 y el 6 de ese palo. Como hay cuatro palos y los cuatro conjuntos de 38 manos son disjuntos, hay $4 \times 38 = 152$ manos que tienen 33 de envido. La probabilidad es, por lo tanto,

$$\frac{152}{9.880} = \frac{1}{65} \approx 0{,}01538.$$

Probabilidad de tener 32 de envido. Nuevamente, lo vamos a pensar de dos maneras. Por un lado, la probabilidad de tener 32 de envido es cuatro veces la probabilidad de tener 32 de oros (o de cualquier otro palo). Para tener 32 de oros, necesitamos que una de nuestras cartas sea el 7 de oros, otra sea el 5 de oros, y la tercera no sea el 6 de oros (de lo contrario, tendríamos 33, ya que usamos las dos mejores cartas). Esto nos da

$$4 \times \frac{3}{40} \times \frac{2}{39} \times \frac{37}{38} = \frac{37}{2.470} \approx 0{,}01498.$$

Curiosamente, debido a la restricción de que la tercera carta no puede ser el 6 del palo en cuestión, es más probable tener 33 que 32 de envido (aunque la diferencia es pequeñísima). Como veremos, hay varios casos así, en que una cantidad más grande de envido es más probable que una cantidad menor. De todos modos, lo que realmente importa en el juego es la probabilidad de tener cierta cantidad o más.

Otra manera de calcular la probabilidad de tener 32 de envido es contando el número de manos que tienen esta propiedad. Para cada palo, hay que tener el 7 y el 5, y no tener el 6. Por lo tanto, para cada palo, hay 37 manos con 32 de envido (para completar la mano que ya tiene el 7 y el 5, debemos elegir una carta más de las 37 que nos quedan a disposición, ya que no podemos elegir ni el 7, ni el 5, ni el 6 del palo en cuestión). Así que hay $4 \times 37 = 148$ manos que tienen 32 de envido, y la probabilidad es

$$\frac{148}{9.880} = \frac{37}{2.470} \approx 0{,}01498.$$

Probabilidad de tener 31, 30, 29 y 28 de envido. Aquí las cuentas se complican un poquito, porque hay más de una manera de tener 31 de envido: teniendo el 7 y el 4 (pero no el 6 ni el 5), o teniendo el 6 y el 5 (pero no el 7) de algún palo. Por lo tanto, la probabilidad de tener (exactamente) 31 de envido es

$$4 \times \frac{3}{40} \times \frac{2}{39} \times \frac{36}{38} + 4 \times \frac{3}{40} \times \frac{2}{39} \times \frac{37}{38} \approx 0{,}02955.$$

También podemos contar las manos que valen 31 de envido. Tenemos 4×36 manos que valen 31 de envido porque tienen el 7 y el 4 pero no el 6 ni el 5 de algún palo (para completar la mano, tenemos que elegir una de entre 36 cartas), y también tenemos 4×37 manos que valen 31 de envido porque tienen el 6 y el 5 pero no el 7 de algún palo (para completar la mano, tenemos que elegir una de entre 37 cartas). Todas estas manos son diferentes, así que la probabilidad de tener 31 de envido es

$$\frac{4 \times (36 + 37)}{9.880} = \frac{292}{9.880} \approx 0{,}02955.$$

Invitamos al lector a comprobar por su cuenta las siguientes probabilidades, usando cualquiera de los dos métodos que venimos usando.

Se puede tener 30 de envido ya sea con 7 y 3 (pero no el 6, 5 o 4) o con 6 y 4 (pero no el 7 o 5). La probabilidad de tener 30 de envido es

$$4 \times \frac{3}{40} \times \frac{2}{39} \times \frac{35}{38} + 4 \times \frac{3}{40} \times \frac{2}{39} \times \frac{36}{38} = \frac{4 \times (35 + 36)}{9.880} \approx 0{,}02874.$$

La probabilidad de tener 29 de envido es

$$\frac{4 \times (34 + 35 + 36)}{9.880} \approx 0{,}04251,$$

y la de tener 28 es

$$\frac{4 \times (33 + 34 + 35)}{9.880} \approx 0{,}04130.$$

Probabilidad de tener 27 de envido. Para calcular la probabilidad de tener 27 de envido, tenemos que sortear una nueva complicación: ahora entran en juego las figuras (sota, caballo y rey). Se puede tener 27 de envido ya sea con el 7 y una figura (pero no el 6, 5, 4, 3, 2 o 1), o con el 6 y el 1 (pero no el 7, 5, 4, 3 o 2), o con el 5 y el 2 (pero no el 7, 6, 4 o 3), o con el 4 y el 3 (pero no el 7, 6 o 5) de algún palo.

Las manos con 27 de envido que no involucran al 7 y una figura las podemos contar como hicimos hasta ahora:

$$4 \times (33 + 34 + 35) = 408.$$

Contemos ahora las manos con 27 de envido que involucran al 7 y una figura. Antes que nada, está claro que los conjuntos de manos con 27 de envido de cada palo son disjuntos (por ejemplo, ninguna mano puede tener 27 de envido usando oros y a la vez 27 de envido usando copas). Así que contemos las manos con 27 de envido usando un palo específico, y al final multiplicamos por 4, el número de palos. También está claro que estas manos con 7 y figura son disjuntas de las 408 que contamos antes.

Llamemos A al conjunto de todas las manos que contienen el 7 de oros, la sota de oros, y otra carta que no sea ni el 6, ni el 5, ni el 4, ni el 3, ni el 2, ni el 1 de oros. Llamemos B al conjunto de todas las manos que contienen el 7 de oros, el caballo de oros, y otra carta que no sea ni el 6, ni el 5, ni el 4, ni el 3, ni el 2, ni el 1 de oros. Y llamemos C al conjunto de todas las manos que contienen el 7 de oros, el rey de oros, y otra carta que no sea ni el 6, ni el 5, ni el 4, ni el 3, ni el 2, ni el 1 de oros. Entonces $A \cup B \cup C$ es el conjunto de todas las manos que valen 27 de envido por tener el 7 y una figura de oros, y queremos saber cuántos elementos tiene. Es decir, buscamos $|A \cup B \cup C|$.

El principio de inclusión-exclusión nos dice que $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$. Es evidente que $|A| = |B| = |C| = 32$. Por ejemplo, para formar una mano que pertenezca a A, tenemos que elegir una carta entre las 32 que hay disponibles: ya están tomadas el 7 y la sota de oros, y no podemos usar tampoco del 1 al 6 de oros (de lo contrario, la mano valdría más que 27 para el envido). También tenemos que $|A \cap B| = |A \cap C| = |B \cap C| = 1$. Por ejemplo, una mano de $A \cap B$ debe contener el 7 y la sota de oros, y también debe contener el 7 y el caballo de oros. Pero hay una sola mano, {7 de oros, sota de oros, caballo de oros}, que cumple con ambos requisitos. Por último, $|A \cap B \cap C| = 0$ ya que $A \cap B \cap C = \varnothing$, el conjunto vacío: ninguna mano (que, recordemos, contiene exactamente tres cartas) puede contener el 7 y la sota, y contener el 7 y el caballo, y contener el 7 y el rey de oros.

El número de manos que valen 27 de envido por tener el 7 y una figura de oros es, según lo que acabamos de razonar, $3 \times 32 - 3 \times 1 = 93$. Como ya dijimos, $4 \times 93 = 372$ es entonces el número de manos que valen 27 de envido por tener el 7 y una figura de cualquier palo, y $408 + 372 = 780$ es el número total de manos que valen 27 para el envido. Por lo tanto, la probabilidad de tener (exactamente) 27 de envido es

$$\frac{780}{9.880} \approx 0{,}07895.$$

Probabilidad de tener 26, 25, 24, 23, 22 y 21 de envido. Razonando de la misma manera, podemos calcular la probabilidad de tener cualquier cantidad entre 21 y 26 de envido.

Se puede tener 26 de envido ya sea con 6 y figura (pero no el 7, 5, 4, 3, 2 o 1), o con 5 y 1 (pero no el 7, 6, 4, 3 o 2), o con 4 y 2 (pero no el 7, 6, 5 o 3). La probabilidad es

$$\frac{372 + 4 \times (33 + 34)}{9.880} = \frac{640}{9.880} \approx 0{,}06478.$$

La cuenta para 25 es idéntica, como el lector puede comprobar.

Se puede tener 24 de envido ya sea con 4 y figura (pero no el 7, 6, 5, 3, 2 o 1), o con 3 y 1 (pero no el 7, 6, 5, 4 o 2). La probabilidad es

$$\frac{372 + 4 \times 33}{9.880} = \frac{504}{9.880} \approx 0{,}05101.$$

La cuenta para 23 es idéntica.

Se puede tener 22 de envido solamente con 2 y figura (pero no el 7, 6, 5, 4, 3 o 1), y se puede tener 21 de envido solamente con 1 y figura (pero no el 7, 6, 5, 4, 3 o 2). La probabilidad en ambos casos es

$$\frac{372}{9.880} \approx 0{,}03765.$$

Probabilidad de tener 20 de envido. Solamente se puede tener 20 de envido con dos figuras de un palo y sin el 7, 6, 5, 4, 3, 2 o 1 de ese palo. Contemos el número de manos que valen 20 de envido usando un palo específico. Llamemos A al conjunto de todas las manos que tienen el rey y el caballo de oros pero no el 7, 6, 5, 4, 3, 2 o 1 de oros. Llamemos B al conjunto de todas las manos que tienen el rey y la sota de oros pero no el 7, 6, 5, 4, 3, 2 o 1 de oros. Y llamemos C al conjunto de todas las manos que tienen el caballo y la sota de oros pero no el 7, 6, 5, 4, 3, 2 o 1 de oros. Entonces $A \cup B \cup C$ es el conjunto de todas las manos que valen 20 de envido usando dos figuras de oros.

Como ya hemos visto, $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$. Es evidente que $|A| = |B| = |C| = 31$: para completar una mano de A, por ejemplo, debemos elegir una de las 31 cartas disponibles, ya que el rey y el caballo de oros ya están en la mano, y la carta que falta no puede ser el 7, 6, 5, 4, 3, 2 o 1 de oros.

También tenemos que $|A \cap B| = |A \cap C| = |B \cap C| = 1$ y $|A \cap B \cap C| = 1$, porque la única mano que pertenece a cualquiera de estas intersecciones es {rey de oros, caballo de oros, sota de oros}.

Por lo tanto, el número de manos que valen 20 de envido usando dos figuras de oro es $3 \times 31 - 3 \times 1 + 1 = 91$. Estas manos son todas distintas de cualquier mano que valga 20 de envido usando dos figuras de otro palo, así que el número total de manos que valen 20 de envido es $4 \times 91 = 364$. La probabilidad de tener 20 de envido es

$$\frac{364}{9.880} \approx 0{,}03684.$$

Nota: Si sumamos las probabilidades que calculamos para cada cantidad de envido entre 20 y 33 (ver la tabla de probabilidades al final), el resultado es $0{,}59514\ldots$. Esta es la probabilidad de tener 20 o más para el envido, que es lo mismo que tener (al menos) dos cartas del mismo palo. Esa cuenta ya la habíamos hecho con otro razonamiento, y por supuesto, con el mismo resultado.

Probabilidad de tener 7 de envido. Para tener (exactamente) 7 de envido, hace falta tener al menos un 7 y tener tres cartas de palos distintos. Llamemos A al conjunto de todas las manos que valen 7 de envido y contienen el 7 de oros, B al conjunto de todas las manos que valen 7 de envido y contienen el 7 de copas, C al conjunto de todas las manos que valen 7 de envido y contienen el 7 de espadas, y D al conjunto de todas las manos que valen 7 de envido y contienen el 7 de bastos. Entonces buscamos $|A \cup B \cup C \cup D|$, que podemos calcular usando el principio de inclusión-exclusión para 4 conjuntos (ecuación (2.1)).

El conjunto A consiste en todas las manos de tres palos distintos que contienen el 7 de oros. Nos quedan $C(3,2) = 3$ maneras de elegir los otros dos palos de la mano, y para cada una de estas elecciones tenemos $10 \times 10 = 100$ maneras de completar la mano, ya que hay diez cartas de cada palo. Por lo tanto, $|A| = 300$. Desde luego, lo mismo vale para B, C y D.

$A \cap B$ es el conjunto de todas las manos de tres palos distintos que contienen el 7 de oros y el 7 de copas. Evidentemente, $|A \cap B| = 20$, y lo mismo vale para las otras intersecciones de dos de los conjuntos A, B, C y D. Por último, es obvio que cada intersección de tres de los conjuntos contiene una única mano (que consiste en tres 7 de distintos palos), y que la intersección de los cuatro conjuntos es vacía (ya que una mano contiene sólo tres cartas).

Por lo tanto tenemos que $|A \cup B \cup C \cup D| = 4 \times 300 - 6 \times 20 + 4 \times 1 - 1 \times 0 = 1.084$, y la probabilidad de tener 7 de envido es

$$\frac{1.084}{9.880} \approx 0{,}10972.$$

Probabilidad de tener 6, 5, 4, 3, 2 y 1 de envido. Para tener 6 de envido, hace falta tener al menos un 6, tener tres cartas de palos distintos, y no tener ningún

7. Invitamos al lector a comprobar por su cuenta que el mismo razonamiento que acabamos de usar nos da que la probabilidad de tener 6 de envido es

$$\frac{4 \times 3 \times 9 \times 9 - 6 \times 18 + 4 \times 1}{9.880} = \frac{868}{9.880} \approx 0{,}08785.$$

Para tener 5 de envido hay que tener al menos un 5, tener tres cartas de palos distintos, y no tener ningún 6 ni 7. Luego, la probabilidad de tener 5 de envido es

$$\frac{4 \times 3 \times 8 \times 8 - 6 \times 16 + 4 \times 1}{9.880} = \frac{676}{9.880} \approx 0{,}06842.$$

Siguiendo de la misma manera con 4, 3, 2 y 1 de envido, tenemos que: la probabilidad de tener 4 de envido es $\frac{4\times3\times7\times7-6\times14+4\times1}{9.880} = \frac{508}{9.880} \approx 0{,}05142$, la probabilidad de tener 3 de envido es $\frac{364}{9.880} \approx 0{,}03684$, la de tener 2 de envido es $\frac{244}{9.880} \approx 0{,}02470$, y la de tener 1 de envido es $\frac{148}{9.880} \approx 0{,}01498$.

Probabilidad de tener 0 de envido. Desde luego, como la suma de las probabilidades de todas las cantidades posibles de envido es 1, y ya calculamos todas las demás, podemos obtener la probabilidad de tener 0 de envido haciendo una simple resta. Pero de todos modos hagamos la cuenta de otra manera. Para tener (exactamente) 0 de envido, hay que tener tres figuras de palos distintos. Hay $C(4,3) = 4$ combinaciones para los tres palos de la mano. Los conjuntos obtenidos para cada combinación de palos son disjuntos entre sí (como ya explicamos cuando calculamos la probabilidad de tener una mano con tres palos distintos). Para cada combinación, tenemos $3 \times 3 \times 3 = 27$ manos, ya que hay tres figuras de cada palo. Por lo tanto, hay $4 \times 27 = 108$ manos que valen 0 de envido, y la probabilidad de tener 0 de envido es $\frac{108}{9.880} \approx 0{,}01093$.

§3. Probabilidades para una ronda

Hasta ahora, cada probabilidad que hemos calculado es la probabilidad de que la mano de un jugador tenga cierta propiedad que nos interesa. Pero también es útil considerar probabilidades de que una ronda tenga ciertas propiedades. El truco se juega de dos (uno contra uno), cuatro (dos contra dos) o seis (tres contra tres) jugadores (en realidad, existe también una versión para tres jugadores, pero la vamos a ignorar). Como cada jugador recibe una mano de tres cartas, cada ronda tiene 6 cartas si se juega de dos, 12 cartas si se juega de cuatro, o 18 cartas si se juega de seis. En cada caso, la ronda es el conjunto de todas las cartas que se reparten, sin importar cómo están distribuidas entre los jugadores. Así que ahora, en vez de usar el conjunto M de todas las manos posibles, tenemos que considerar los siguientes conjuntos:

$$R_2 = \{T : T \subseteq S \text{ y } |T| = 6\}$$

es el conjunto de todas las rondas posibles si se juega de dos, sin importar cómo están distribuidas las 6 cartas entre los dos jugadores;

$$R_4 = \{T : T \subseteq S \text{ y } |T| = 12\}$$

es el conjunto de todas las rondas posibles si se juega de cuatro, sin importar cómo están distribuidas las 12 cartas entre los cuatro jugadores;

$$R_6 = \{T : T \subseteq S \text{ y } |T| = 18\}$$

es el conjunto de todas las rondas posibles si se juega de seis, sin importar cómo están distribuidas las 18 cartas entre los seis jugadores.

Antes que nada, contemos el número de rondas posibles en cada caso:

$$|R_2| = C(40,6) = \frac{40!}{34!\,6!} = 3.838.380,$$
$$|R_4| = C(40,12) = \frac{40!}{28!\,12!} = 5.586.853.480$$
$$|R_6| = C(40,18) = \frac{40!}{22!\,18!} = 113.380.261.800.$$

Suponemos que, en cada caso, todas las rondas tienen la misma probabilidad. Los razonamientos que vamos a hacer para una ronda son los mismos que hicimos para una mano, aunque ahora los números son más grandes y algunas fórmulas (provenientes del principio de inclusión-exclusión) son más complejas.

Probabilidad de que haya una carta específica en la ronda. ¿Cuál es la probabilidad de que algún jugador tenga el as de espadas en su mano? Al igual que antes, podemos pensarlo de dos maneras. Por un lado, la probabilidad de que una carta específica a se encuentre en un conjunto de k cartas del mazo es $\frac{k}{40}$. Por el otro, podemos contar el número de rondas que contienen la carta a, y dividir por el número de rondas posibles. Los resultados son los siguientes:

Dos jugadores: $\frac{6}{40} = \frac{C(39,5)}{C(40,6)} = 0{,}15$.

Cuatro jugadores: $\frac{12}{40} = \frac{C(39,11)}{C(40,12)} = 0{,}3$.

Seis jugadores: $\frac{18}{40} = \frac{C(39,17)}{C(40,18)} = 0{,}45$.

Como vemos, se duplica (resp. triplica) la probabilidad al duplicarse (resp. triplicarse) el número de jugadores.

Probabilidad de que haya dos cartas específicas en la ronda. Si a y b son dos cartas específicas, ¿cuál es la probabilidad de que ambas estén en la ronda? Por ejemplo, ¿cuál es la probabilidad de que en la ronda se encuentren el as de espadas y también el as de bastos? Podemos pensarlo como la probabilidad de que a sea una carta de la ronda, multiplicada por la probabilidad de que b esté entre las demás cartas de la ronda. O podemos contar el número de rondas que contienen tanto a a como a b, y dividir por el número de rondas posibles. Los resultados son:

Dos jugadores: $\frac{6}{40} \times \frac{5}{39} = \frac{C(38,4)}{C(40,6)} \approx 0{,}01923$.

Cuatro jugadores: $\frac{12}{40} \times \frac{11}{39} = \frac{C(38,10)}{C(40,12)} \approx 0{,}08462$.

Seis jugadores: $\frac{18}{40} \times \frac{17}{39} = \frac{C(38,16)}{C(40,18)} = \approx 0{,}19615$.

Probabilidad de que haya tres cartas específicas en la ronda. Si a, b y c son tres cartas específicas (por ejemplo el as de espadas, el as de bastos y el 7 de espadas), la probabilidad de que las tres se encuentren en la ronda es la siguiente:

Dos jugadores: $\frac{6}{40} \times \frac{5}{39} \times \frac{4}{38} = \frac{C(37,3)}{C(40,6)} \approx 0{,}00202$.

Cuatro jugadores: $\frac{12}{40} \times \frac{11}{39} \times \frac{10}{38} = \frac{C(37,9)}{C(40,12)} \approx 0{,}02227$.

Seis jugadores: $\frac{18}{40} \times \frac{17}{39} \times \frac{16}{38} = \frac{C(37,15)}{C(40,18)} = \approx 0{,}08259$.

Probabilidad de que haya cuatro cartas específicas en la ronda. Ésta es la probabilidad de que en la ronda se encuentren todos los 3, o de que se encuentren todos los 2, o de que se encuentren el as de espadas, el as de bastos, el 7 de espadas y el 7 de oros. La probabilidad es la siguiente:

Dos jugadores: $\frac{6}{40} \times \frac{5}{39} \times \frac{4}{38} \times \frac{3}{37} = \frac{C(36,2)}{C(40,6)} \approx 0{,}00016$.

Cuatro jugadores: $\frac{12}{40} \times \frac{11}{39} \times \frac{10}{38} \times \frac{9}{37} = \frac{C(36,8)}{C(40,12)} \approx 0{,}00542$.

Seis jugadores: $\frac{18}{40} \times \frac{17}{39} \times \frac{16}{38} \times \frac{15}{37} = \frac{C(36,14)}{C(40,18)} \approx 0{,}03348$.

Probabilidad de que haya (al menos) una de k cartas específicas en la ronda. Dadas las k cartas $a_1, a_2, \ldots, a_k$, nos interesa la probabilidad de que en la ronda haya al menos una de ellas. Estas cuentas son de interés porque nos dicen, por ejemplo:

- $k = 2$: la probabilidad de que en la ronda esté el as de espadas o el as de bastos.
- $k = 4$: la probabilidad de que en la ronda haya (al menos) una carta que valga más que un 3 para el truco.
- $k = 8$: la probabilidad de que en la ronda haya (al menos) una carta que valga más que un 2 para el truco.
- $k = 12$: la probabilidad de que en la ronda haya (al menos) una carta que valga más que el as de oros (o de copas) para el truco, o la probabilidad de que en la ronda haya (al menos) una figura.

Llamemos R al conjunto de todas las rondas posibles. Es decir, $R = R_2$ si se juega de dos, $R = R_4$ si se juega de cuatro, y $R = R_6$ si se juega de seis jugadores. Si para cada $1 \le i \le k$ definimos

$$A_i = \{T \in R : a_i \in T\}$$

(el conjunto de todas las rondas que contienen la carta a_i), entonces el conjunto de todas las rondas que contienen (al menos) una de las k cartas es

$$\bigcup_{i=1}^{k} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k,$$

y la probabilidad que buscamos es $|\bigcup_{i=1}^{k} A_i|/|R|$.

Para calcular el número $|\bigcup_{i=1}^{k} A_i|$ tendremos que hacer uso del principio de inclusión-exclusión. Hagamos las cuentas por separado para cada caso (dos, cuatro o seis jugadores). Un detalle que debemos mencionar es que si $l > k$, entonces $C(k,l) = 0$ por definición, ya que no hay manera de elegir l elementos diferentes de un conjunto de k elementos.

Dos jugadores: $R = R_2$ y las rondas contienen 6 cartas:

- Hay $C(k,1) = k$ conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_k$, y cada uno tiene $C(39,5)$ elementos (rondas).
- Hay $C(k,2)$ maneras de elegir dos de los conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_k$, y cada intersección de dos conjuntos tiene $C(38,4)$ elementos.
- Hay $C(k,3)$ maneras de elegir tres de los conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_k$, y cada intersección de tres conjuntos tiene $C(37,3)$ elementos.
- Hay $C(k,4)$ maneras de elegir cuatro de los conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_k$, y cada intersección de cuatro conjuntos tiene $C(36,2)$ elementos.
- Hay $C(k,5)$ maneras de elegir cinco de los conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_k$, y cada intersección de cinco conjuntos tiene $C(35,1) = 35$ elementos.
- Hay $C(k,6)$ maneras de elegir seis de los conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_k$, y cada intersección de seis conjuntos tiene $C(34,0) = 1$ único elemento.
- Cada intersección de 7 o más de los conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_k$ es vacía, ya que una ronda contiene solamente 6 cartas.

El principio de inclusión-exclusión nos dice que

$$\begin{aligned} |\bigcup_{i=1}^{k} A_i| &= k \times C(39,5) - C(k,2) \times C(38,4) + C(k,3) \times C(37,3) \\ &\quad - C(k,4) \times C(36,2) + C(k,5) \times 35 - C(k,6) \times 1. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Al sustituir los valores deseados de k (recordemos que $C(k,l) = 0$ si $l > k$) y dividir el resultado por $|R| = |R_2| = C(40,6) = 3\,838\,380$, obtenemos las probabilidades que buscamos.

Como hicimos en el caso de una sola mano, podemos usar la idea del complemento de un conjunto para obtener fórmulas más simples (recordemos (2.3)). Para dos jugadores, la probabilidad de que haya (al menos) una de k cartas específicas en la ronda es

$$1 - \frac{C(40-k,6)}{C(40,6)}, \tag{3.2}$$

ya que hay $C(40-k,6)$ rondas que no contienen ninguna de las k cartas.

Cuatro jugadores: $R = R_4$ y las rondas contienen 12 cartas.

El lector puede calcular $|\bigcup_{i=1}^{k} A_i|$ usando el principio de inclusión-exclusión, teniendo en cuenta que ahora cada intersección de 13 o más de los conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_k$ es vacía, ya que una ronda contiene solamente 12 cartas. El resultado será parecido a la ecuación (3.1), pero con más términos. Para obtener las probabilidades que buscamos, ahora dividimos por $|R| = |R_4| = C(40,12)$. Alternativamente, podemos usar el complemento para obtener un resultado parecido a la expresión (3.2): la probabilidad de que haya (al menos)una de las k cartas es $1 - \frac{C(40-k,12)}{C(40,12)}$.

Seis jugadores: $R = R_6$ y las rondas contienen 18 cartas.

Nuevamente, se puede calcular $|\bigcup_{i=1}^{k} A_i|$ usando el principio de inclusión-exclusión y luego dividir por $|R| = |R_6| = C(40,18)$, o se puede usar el complemento para obtener que la probabilidad es $1 - \frac{C(40-k,18)}{C(40,18)}$.

Las tablas del final incluyen los resultados (para una mano y para una ronda de dos, cuatro o seis jugadores) para k = 2, 3, 4, 8 y 12, que son seguramente los de mayor interés.

Estas probabilidades son útiles para el truco. Como el envido se juega usando manos individuales y no combinando las cartas de la ronda, no tiene mucho sentido calcular probabilidades para el envido asociadas a una ronda.

§4. Observaciones finales y cuestiones pendientes

La última sección consiste en cinco tablas con probabilidades de interés para el truco (para una mano y para una ronda de dos, cuatro o seis jugadores) y para el envido. Algunas observaciones que podemos hacer a partir de estas tablas son las siguientes:

- La probabilidad de tener flor es un poquito menor que $\frac{1}{20} = 5\,\%$.
- La probabilidad de tener 27 o más para el envido es alrededor de $\frac{1}{4} = 25\,\%$.
- La probabilidad de tener 23 o más para el envido es alrededor de 48 %, y la de tener 22 o más es alrededor de 52 %. Por lo tanto, a la larga un jugador debería tener 22 o más de envido un poquito más de la mitad de las veces, y 23 o más un poquito menos de la mitad de las veces.

- A la larga, un jugador debería tener (al menos) una carta que valga más que un 2 para el truco alrededor de la mitad de las veces, y una carta que valga más que el as de oros (o de copas) alrededor de dos tercios de las veces. También debería recibir (al menos) una figura alrededor de dos tercios de las veces.
- En una ronda de cuatro jugadores, la probabilidad de que esté el as de espadas o el as de bastos (o ambas cartas) es 51.5 %, es decir un poquito mayor que $\frac{1}{2}$. Si se juega de seis, la probabilidad es alrededor de 70 %.
- En una ronda de cuatro jugadores, la probabilidad de que haya (al menos) una de las cuatro mejores cartas (as de espadas, as de bastos, 7 de espadas, 7 de oros) es alrededor de 78 %. Si se juega de seis, la probabilidad es alrededor de 92 %. Estas probabilidades son también las de que haya por lo menos un 3, o de que haya por lo menos un 2, en la ronda.

Como última observación, una advertencia. Un jugador no debería esperar ninguna regularidad en el reparto de las cartas basándose en estas probabilidades, salvo a muy largo plazo. En una partida, o en una noche entera de timba, puede pasar cualquier cosa. En particular, se suele caer en la trampa de pensar que las manos o rondas anteriores influyen en las probabilidades de las que vienen. Si no nos ha tocado el as de espadas en diez manos seguidas, la probabilidad de que nos toque en la que sigue es la misma ($\frac{3}{40}$), ni más ni menos, que si nos ha tocado el as de espadas en las últimas tres manos.

Este ensayo es tan sólo una investigación superficial de las probabilidades en el truco. Quedaron muchas cosas interesantes y útiles en el tintero, como por ejemplo:

- Probabilidades condicionales. Cuando jugamos al truco, sabemos nuestras cartas y a veces también algunas cartas de los compañeros de equipo. Conocemos también las cartas que se van jugando en la ronda, y tal vez el puntaje de algunos jugadores para el envido. Desde luego, esta información altera las probabilidades. Por ejemplo, si tenemos el as de espadas, es obvio que la probabilidad de que en la ronda esté el as de espadas o el de bastos es 1, y no la que se indica en las tablas que siguen. Otro ejemplo es, si un adversario cantó 27 de envido (aquí suponemos que es obligatorio declarar el puntaje correcto), ¿cuál es la probabilidad de que tenga ciertas cartas? ¿Y si ya jugó la sota de espadas y le quedan dos cartas en la mano? Este tipo de probabilidad de un evento, sabiendo que se ha dado otro evento, se llama "probabilidad condicional". Se podría hacer varias tablas más con este tipo de probabilidades.
- El valor esperado de ciertas variables de interés, tal vez bajo ciertas condiciones. Por ejemplo, ¿cuál es el puntaje esperado para el envido en una

mano? Este valor es fácil de encontrar usando la tercera tabla en las páginas que siguen, pero, ¿cuál es el puntaje esperado si conocemos algunas cartas de los demás jugadores?

- Probabilidades de ganar el envido en una ronda de dos, cuatro o seis jugadores teniendo ciertas cantidades, siendo mano o no. Por ejemplo, si se tiene 27 de envido en una ronda de cuatro jugadores y se es mano, ¿cuál es la probabilidad de que ese envido sea mejor que el de los rivales? Se puede hacer tablas con probabilidades de ganar para cada cantidad y en cada situación, al igual que tablas con las cantidades necesarias para tener ciertas probabilidades de ganar el envido.

Invitamos al lector interesado a investigar estas cuestiones y aportar más tablas de probabilidades para la comunidad timbera.

Por último, quisiera agradecer a Ariel Arbiser, Carlos D'Andrea, Pablo Mislej, Adrián Paenza, Ricardo Podestá y el referí, que se tomaron el tiempo de leer este artículo y hacer muy buenos comentarios y sugerencias.

§5. Apéndice: Breve repaso del juego

Como es sabido, el juego tiene tres envites o suertes: flor, envido y truco. Describimos aquí brevemente los detalles del juego que nos sirven. Este repaso no es un manual para aprender a jugar, ni para aprenderse el reglamento, las señas, o la mecánica de las apuestas.

Truco. Para ganar el truco en una ronda, se debe ganar dos de las tres bazas. El equipo que gana la primera baza tiene el desempate en la segunda y la tercera (es decir, el otro equipo debe ganar, no puede empatar, en la segunda y la tercera). Si la primera baza queda empatada ("empardada", o "parda"), gana el truco el equipo que gana la segunda baza. Si la segunda también queda empardada, la tercera decide. Si la tercera también queda empardada, gana "de mano" el equipo del primer jugador en la ronda.

La jerarquía de las cartas para el truco es la siguiente, de mayor a menor: as de espadas, as de bastos, 7 de espadas, 7 de oros, 3, 2, as de oros y as de copas (son de igual valor), rey, caballo, sota, 7 de copas y 7 de bastos (son de igual valor), 6, 5, 4.

Envido. A diferencia del truco, el envido no necesariamente se juega en cada ronda. Si se juega, el ganador es el equipo cuyo jugador tiene la mayor cantidad de envido en su mano. Si dos jugadores de distintos equipos tienen el mismo puntaje para el envido, gana el que es "mano" del otro: el que va primero en la ronda.

Puntaje para el envido: Al tener (al menos) dos cartas del mismo palo, se tiene 20 puntos más los puntos indicados por el valor numérico de esas cartas – salvo que el valor de las figuras (rey, caballo y sota) es cero. Si no se tiene dos cartas del mismo palo, no se suman los 20 puntos. Si se tiene tres cartas del mismo palo (flor), se eligen las dos mejores para el envido. Es decir, o se juega sin flor, o se permite no cantar una flor y usar las dos mejores cartas para el envido.

Ejemplos:

- Se tiene 33, el puntaje más alto posible, si se tiene un 7 y un 6 del mismo palo.
- Se tiene 27 (“las viejas”) si se tiene (de un mismo palo) el 7 y una figura (pero no el 6, 5, 4, 3, 2 o 1, lo que resultaría en un puntaje más alto), o el 6 y el 1 (pero no el 7, 5, 4, 3 o 2), o el 5 y el 2 (pero no el 7, 6, 4 o 3) , o el 4 y el 3 (pero no el 7, 6 o 5).
- Se tiene 20 si se tiene dos figuras del mismo palo y la tercera carta no es el 7, 6, 5, 4, 3, 2 o 1 de ese mismo palo.
- Si no se tiene dos cartas del mismo palo, el puntaje puede ser de 0 a 7.
- Si se tiene el 3, 4 y 7 del mismo palo, se tiene 31. Si se tiene la sota, el 1 y el 3 del mismo palo, se tiene 24.

Flor. Más allá de los divertidos versos que la acompañan, la flor no nos interesa mucho, porque es la única suerte que sólo se puede cantar si un jugador tiene tres cartas del mismo palo (es decir, tiene flor. Como vimos, la probabilidad es menor que $\frac{1}{20}$) y, en tal caso, sólo tiene desquite si el rival (o uno de los rivales) también tiene flor. En cambio, el envido y el truco los puede cantar cualquier jugador sin importar qué mano le ha tocado, y siempre tienen desquite (el rival o los rivales tienen la opción de querer o de levantar).

Como es poco probable tener que tomar decisiones al respecto, en este ensayo no nos ocupamos de la flor, más allá de calcular la probabilidad de que nos toque una en la mano. Si al lector le gusta jugar con flor, lo invitamos a calcular probabilidades para distintos puntajes.

§6. Tablas de probabilidades

A continuación compilamos varias probabilidades de interés para el juego, agrupadas en cinco tablas. Las tres primeras contienen probabilidades acerca de la mano de un jugador. La cuarta incluye probabilidades para una ronda de dos, cuatro o seis jugadores. Y la última es una reorganización de las probabilidades (que ya se encuentran en la primera y en la cuarta tabla) de que haya al menos una de k cartas específicas en la mano de un jugador, o en una ronda de dos, cuatro o seis jugadores. Los resultados son para $k = 1, 2, 3, 4, 8$ y 12.

Probabilidades para una mano – Truco

Evento	Ejemplo(s) o significado	Probabilidad
Tener una carta específica	Tener el as de espadas	0.07500
Tener dos cartas específicas	Tener el as de espadas y el as de bastos	0.00385
Tener tres cartas específicas	Tener el as, el 7 y el 6 de espadas	0.00010
Tener (al menos) una de dos cartas específicas	Tener el as de espadas o el as de bastos	0.14615
Tener (al menos) una de tres cartas específicas	Tener el as de espadas o el as de bastos o el 7 de espadas	0.21356
Tener (al menos) una de cuatro cartas específicas	Tener (al menos) un 3 Tener (al menos) un 2 Tener (al menos) una carta que valga más que un 3 para el truco	0.27733
Tener (al menos) una de ocho cartas específicas	Tener (al menos) una carta que valga más que un 2 para el truco	0.49798
Tener (al menos) una de doce cartas específicas	Tener (al menos) una carta que valga más que el as de oros (o de copas) para el truco Tener (al menos) una figura	0.66842

Probabilidades para una mano – Envido

Cantidad k	Probabilidad de tener (exactamente) k de envido	Probabilidad de tener $\geq k$ de envido
33	0.01538	0.01538
32	0.01498	0.03036
31	0.02955	0.05992
30	0.02874	0.08866
29	0.04251	0.13117
28	0.04130	0.17247
27	0.07895	0.25142
26	0.06478	0.31619
25	0.06478	0.38097
24	0.05101	0.43198
23	0.05101	0.48300
22	0.03765	0.52065
21	0.03765	0.55830
20	0.03684	0.59514
7	0.10972	0.70486
6	0.08785	0.79271
5	0.06842	0.86113
4	0.05142	0.91255
3	0.03684	0.94939
2	0.02470	0.97409
1	0.01498	0.98907
0	0.01093	1

Probabilidades para una mano – Palos

Evento	Ejemplo(s) o significado	Probabilidad
Tener tres cartas de palos distintos	Tener ≤ 7 de envido	0.40486
Tener (al menos) dos cartas del mismo palo	Tener ≥ 20 de envido	0.59514
Tener tres cartas del mismo palo	Tener flor	0.04858
Tener (al menos) una de diez cartas específicas	Tener (al menos) un oro Tener (al menos) una copa Tener (al menos) una espada Tener (al menos) un basto	0.58907

Probabilidades para una ronda – Truco

Evento	Ejemplo(s) o significado	No. de jugadores	Probabilidad
Que la ronda tenga una carta específica	Que algún jugador tenga el as de espadas	2	0.15000
		4	0.30000
		6	0.45000
Que la ronda tenga dos cartas específicas	Que en la ronda estén el as de espadas y el as de bastos	2	0.01923
		4	0.08462
		6	0.19615
Que la ronda tenga tres cartas específicas	Que en la ronda estén el as de espadas, el as de bastos y el 7 de espadas	2	0.00202
		4	0.02227
		6	0.08259
Que la ronda tenga cuatro cartas específicas	Que en la ronda estén todos los 3 Que en la ronda estén todos los 2 Que en la ronda estén el as de espadas, el as de bastos, el 7 de espadas y el 7 de oros	2	0.00016
		4	0.00542
		6	0.03348
Que la ronda tenga (al menos) una de dos cartas específicas	Que en la ronda esté el as de espadas o el as de bastos	2	0.28077
		4	0.51538
		6	0.70385
Que la ronda tenga (al menos) una de tres cartas específicas	Que en la ronda esté el as de espadas, o el as de bastos, o el 7 de espadas	2	0.39433
		4	0.66842
		6	0.84413
Que la ronda tenga (al menos) una de cuatro cartas específicas	Que en la ronda haya (al menos) un 3 Que en la ronda haya (al menos) un 2 Que en la ronda haya (al menos) una carta que valga más que un 3 para el truco	2	0.49255
		4	0.77596
		6	0.91996
Que la ronda tenga (al menos) una de ocho cartas específicas	Que en la ronda haya (al menos) una carta que valga más que un 2 para el truco	2	0.76391
		4	0.95958
		6	0.99584
Que la ronda tenga (al menos) una de doce cartas específicas	Que en la ronda haya (al menos) una carta que valga más que el as de oros (o de copas) para el truco Que en la ronda haya (al menos) una figura	2	0.90185
		4	0.99455
		6	0.99988

Probabilidad de que haya (al menos) una de *k* cartas específicas

k	Mano de un jugador (3 cartas)	Ronda de 2 jugadores (6 cartas)	Ronda de 4 jugadores (12 cartas)	Ronda de 6 jugadores (18 cartas)
1	0.07500	0.15000	0.30000	0.45000
2	0.14615	0.28077	0.51538	0.70385
3	0.21356	0.39433	0.66842	0.84413
4	0.27733	0.49255	0.77596	0.91996
8	0.49798	0.76391	0.95958	0.99584
12	0.66842	0.90185	0.99455	0.99988

Referencias

Anderson, I. (2001). *A first course in discrete mathematics*. Springer-Verlag, London.
Isaac, R. (1995). *The pleasures of probability*. Springer-Verlag, New York.

Emiliano Gómez
Department of Mathematics, University of California, Berkeley, CA 94720.
(✉) *emgomez@berkeley.edu*

Recibido: *20 de junio de 2019*.
Aceptado: *26 de julio de 2019*.
Publicado en línea: *28 de agosto de 2019*.

el último dígito de n^5 es n para cualquier natural n?

En efecto, observemos primero que

$$0^5 = 0, \qquad 1^5 = 1, \qquad 2^5 = 32, \qquad 3^5 = 243, \qquad 4^5 = 1.024,$$

$$5^5 = 3.125, \qquad 6^5 = 7.776, \qquad 7^5 = 16.887, \qquad 8^5 = 32.678, \qquad 9^5 = 59.049,$$

de donde el resultado se cumple para los dígitos.

Si nos fijamos, estas cuentas dicen que

$$n^5 \equiv n \pmod{10} \tag{1}$$

para todo $n = 0, 1, \ldots, 9$, donde $\equiv$ denota congruencia módulo 10. Recordemos que dos enteros a y b son congruentes módulo un natural n, denotado $a \equiv b \pmod{n}$, si n divide a $a - b$.

¿Cómo deducimos de aquí que el resultado es cierto para un número natural n cualquiera? Consideremos su desarrollo decimal, es decir supongamos que

$$n = a_k 10^k + \cdots + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0$$

donde $0 \leq a_i \leq 9$ para $0 \leq i \leq 9$. Tomando congruencia módulo 10 tenemos que

$$n \equiv a_0 \pmod{10}. \tag{2}$$

Por otra parte, usando propiedades de congruencias, tenemos que

$$n^5 \equiv a_k 10^{5k} + \cdots + a_1 10^5 + a_0^5 \equiv a_0^5 \pmod{10}. \tag{3}$$

O sea, de (2) y (3) resulta que

$$n \equiv a_0 \pmod{10} \qquad \text{y} \qquad n^5 \equiv a_0^5 \pmod{10}$$

Pero en (1) vimos que la congruencia $a_0^5 \equiv a_0 \pmod{10}$ vale para los dígitos. De aquí sale entonces que

$$n^5 \equiv n \pmod{10}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Por ejemplo

$$2019^5 = 33.549.155.665.686.099.$$

Como una curiosidad adicional, observemos que la ecuación (1) implica

$$n^5 - n \equiv n(n^4 - 1) \equiv n(n^2 - 1)(n^2 + 1) \equiv 0 \pmod{10},$$

de donde multiplicando por n tenemos que

$$(n^2 - 1)n^2(n^2 + 1) \equiv 0 \pmod{10}. \tag{4}$$

Es decir, el producto de 3 enteros consecutivos (que siempre es divisible por 2 y por 3) es divisible por 10, siempre que el del medio sea un cuadrado. Como 2, 3 y 5 son coprimos, en realidad, este producto resulta divisible por 30. Por ejemplo

$$\begin{aligned}
&3 \cdot 4 \cdot 5 = 30, \\
&8 \cdot 9 \cdot 10 = 720 = 24 \cdot 30, \\
&15 \cdot 16 \cdot 17 = 4.080 = 136 \cdot 30, \\
&24 \cdot 25 \cdot 26 = 15.600 = 520 \cdot 30.
\end{aligned}$$

Podemos probar esto directamente, pues (4) es equivalente a

$$(n-1)n(n+1)n(n^2+1) \equiv 0 \pmod{10}.$$

Los primeros tres factores dicen que el producto es divisible por 6. Además, si $n = 5k$ o $5k \pm 1$ entonces el producto es divisible por 5. Si $n = 5k \pm 2$ entonces el último factor toma la forma

$$n^2 + 1 = (5k \pm 2)^2 + 1 = 25k^2 \pm 20k + 5$$

y por lo tanto es divisible por 5. Luego el producto es divisible por 5 y por lo tanto por 30.

Finalmente, mencionamos que el resultado es mucho más general y en realidad vale no sólo para potencias quintas, si no que también para potencias de la forma $4k+1$ $(5, 9, 13$, etc.). Mas precisamente, vale

$$n^{4k+1} \equiv n \pmod{10}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. La idea es usar lo que ya hicimos. Por ejemplo,

$$n^9 = n^5 \cdot n^4 \equiv n \cdot n^4 = n^5 \equiv n \pmod{10}$$

para todo natural n. Del mismo modo, en general, como

$$4k + 1 = 4((k-1)+1) + 1 = (4(k-1)+1) + 4,$$

haciendo inducción en k, tenemos

$$n^{4k+1} = n^{4(k-1)+1} \cdot n^4 \equiv n \cdot n^4 = n^5 \equiv n \pmod{10}.$$

Por ejemplo,

$$2019^{13} = 9.263.436.872.325.375.124.423.761.282.625.811.510.443.059.$$

Las congruencias fueron introducidas por el genial matemático y físico alemán Johann Carl Friedrich Gauss (Brunswick, 30 de abril de 1777 – 23 de febrero de 1855), en su monumental tratado *Disquisitiones Arithmeticae* (Investigaciones Aritméticas), en el cual aparece un capítulo su tesis. Las congruencias son desde entonces una herramienta fundamental en el estudio de la Aritmética.